Olympiadeklassen **11–12**

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

651211

Die sechsstellige Zahl 651211, die Nummer dieser Aufgabe, hat folgende Eigenschaften:

(1) Die Ziffer 0 kommt nicht vor.
(2) Die Summe der beiden ersten Ziffern ist gleich der Zahl, die die beiden letzten Ziffern bilden.
(3) Die Zahl, die die beiden mittleren Ziffern bilden, ist um 1 größer als die Summe der beiden ersten Ziffern.

Durch diese drei Bedingungen ist die Zahl 651211 nicht eindeutig bestimmt.

Man ermittle, wie viele sechsstellige Zahlen es gibt, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen.

651212

Von vier positiven ganzen Zahlen ist folgendes bekannt:

(1) Alle Zahlen sind ungerade. Keine zwei der Zahlen sind gleich.
(2) Die kleinsten zwei der Zahlen sind Primzahlen.
(3) Ordnet man die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge, so bilden die drei Differenzen benachbarter Zahlen eine streng monoton wachsende arithmetische Folge.

Man bestimme den kleinstmöglichen Wert des Produkts aller vier Zahlen.

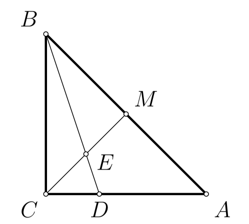
Hinweis: Eine Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ von Zahlen heißt *streng monoton wachsend,* wenn $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ gilt. Die Folge ist eine *arithmetische Folge,* wenn es eine feste Zahl r gibt, für die $n_2 = n_1 + r$, $n_3 = n_2 + r$, $n_4 = n_3 + r$, $\ldots$, $n_{k-1} = n_{k-2} + r$ und $n_k = n_{k-1} + r$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651213

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, und der Punkt D liegt auf der Strecke $\overline{CA}$. Die Strecken $\overline{CM}$ und $\overline{BD}$ schneiden sich im Punkt E, vgl. Abbildung A 651213.

Man bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $DAME$, wenn $\overline{CA}$ die Länge 12 und $\overline{CD}$ die Länge 4 hat.



A 651213

651214

Ein König will die acht Ritter seines Reichs zu einem Fest einladen. In der Königsburg gibt es aber nur fünf Gästezimmer, sodass drei Ritter gemeinsam im Saal einquartiert werden müssen.

Nun weiß der König, dass eine gewisse Zahl n von Paaren seiner Ritter gerade in Fehde liegen. Von jedem dieser Paare kann jeweils höchstens ein Ritter im Saal untergebracht werden.

a) Man zeige, dass die Ritter immer konfliktfrei einquartiert werden können, wenn $n \leq 11$ gilt.
b) Man zeige, dass für $n \geq 12$ eine konfliktfreie Belegung des Saals nicht in jedem Fall möglich ist.

Schulrunde
der
65. MathematikOlympiade
in Baden-Wüttemberg

Ich habe die Wettbewerbsaufgaben eigenständig gelöst und will an der Schulrunde der 65. Mathematik Olympiade teilnehmen:

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Klasse/Jahrgangsstufe: ______________________________

Schulform: ☐ G9 ☐ G8 ☐ Andere Schulform

Email:(optional) ______________________________

Damit ich auf dem Laufenden bleibe, stimme ich zu:

- ☐ Ich bin mit der Verarbeitung der Daten zur Durchführung der Schulrunde der 65. Mathematik Olympiade durch den WZBW e.V. einverstanden. (Ohne diese Zustimmung können wir für dich keine Urkunden erstellen und dich nicht zur nächsten Runde einladen.)
- ☐ Ich bin damit einverstanden, in den kommenden Jahren durch den WZBW e.V. informiert zu werden, wenn der Wettbewerb nächstes Jahr startet. (Optional)

Ort, Datum: ______________________

______________________ ______________________

*Unterschrift der Schüler*in* *Unterschrift der Eltern*